

# ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И ЭКОЛОГИИ

## ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ по курсу: ФИЗИКА – ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Автор: доцент Барабанов Алексей Леонидович

### ПОТОК И ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Потоком векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  через поверхность  $S$  называется следующая величина:

$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\boldsymbol{\sigma} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \Delta\boldsymbol{\sigma}_i.$$

Здесь  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$  есть малый направленный элемент поверхности  $S$ , включающий в себя точку  $\mathbf{r}_i$ ; вектор  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$  нормален к поверхности  $S$  в точке  $\mathbf{r}_i$ , а его модуль  $|\Delta\boldsymbol{\sigma}_i| = \Delta\sigma_i$  равен площади элемента поверхности.

Линейным интегралом векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  вдоль контура  $C$  называется следующая величина:

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \Delta\mathbf{l}_i.$$

Здесь  $\Delta\mathbf{l}_i$  есть малый направленный элемент контура  $C$ , включающий в себя точку  $\mathbf{r}_i$ ; вектор  $\Delta\mathbf{l}_i$  касателен к контуру  $C$  в точке  $\mathbf{r}_i$ , а его модуль  $|\Delta\mathbf{l}_i| = \Delta l_i$  равен длине элемента контура.

Циркуляцией  $\Gamma$  векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  вдоль замкнутого контура  $C$  называется линейный интеграл:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{l}.$$

### ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Пусть в точках  $\mathbf{r}_i$  покоятся заряды  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Потенциальная энергия пробного заряда  $q$ , находящегося в точке  $\mathbf{r}$ , есть:

$$U = k_e \sum_i \frac{q q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Сила  $\mathbf{F}$  (сила Кулона), действующая на пробный заряд, есть:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = k_e \sum_i \frac{q q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}.$$

Потенциал электрического поля в точке  $\mathbf{r}$ , создаваемого покоящимися зарядами, есть:

$$\varphi = \frac{U}{q} = k_e \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Напряженность электрического поля есть:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = k_e \sum_i \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}.$$

Линейный интеграл напряженности постоянного электрического поля от точки 1 до точки 2 не зависит от контура интегрирования и определяется убывью потенциала:

$$\int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi(1) - \varphi(2).$$

Потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого зарядом, распределенным непрерывно с плотностью  $\rho(\mathbf{r})$ , определяется формулами:

$$\varphi(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

### ЕДИНИЦЫ ГС ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В гауссовской системе (ГС) единица измерения заряда 1 СГСЭ<sub>q</sub> по определению такова, что

$$\frac{(1 \text{ СГСЭ}_q)^2}{(1 \text{ см})^2} = 1 \text{ дин},$$

поэтому:

$$k_e^{\text{ГС}} = 1.$$

Единица измерения электрического потенциала есть:

$$1 \text{ СГСЭ}_V \equiv \frac{1 \text{ эрг}}{1 \text{ СГСЭ}_q} = \frac{1 \text{ СГСЭ}_q}{1 \text{ см}} = (1 \text{ дин})^{1/2}.$$

Единица измерения напряженности электрического поля есть 1 СГСЭ<sub>V</sub>/см.

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Пусть по замкнутым тонким проводам  $C_1$  и  $C_2$  текут постоянные токи  $I_1$  и  $I_2$ . Сила  $d\mathbf{F}_1$ , действующая на элемент  $d\mathbf{l}_1$  1-го провода, находящегося в точке  $\mathbf{r}_1$ , со стороны всего второго провода, есть:

$$d\mathbf{F}_1 = k_m I_1 I_2 \oint_{C_2} \frac{[d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

В частности, сила  $dF_1$  (сила Ампера), действующая на элемент  $dl_1$  бесконечно длинного прямого 1-го провода со стороны всего бесконечно длинного 2-го провода, параллельного 1-му, равна

$$\frac{dF_1}{dl_1} = k_m \frac{2I_1 I_2}{\rho},$$

где  $\rho$  – расстояние между проводами.

### ЕДИНИЦЫ СИ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В СИ единица измерения заряда 1 Кл по определению такова, что

$$\frac{2(1 \text{ Кл/сек})^2}{1 \text{ м}} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}}{1 \text{ м}},$$

поэтому:

$$k_m^{\text{СИ}} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2},$$

где 1 А = 1 Кл/1 сек.

Единицы измерения заряда 1 СГСЭ<sub>q</sub> и 1 Кл связаны следующим образом:

$$1 \text{ Кл} = 2.9979 \dots \cdot 10^9 \text{ СГСЭ}_q \simeq 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ}_q.$$

Соответственно:

$$k_e^{\text{СИ}} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}, \quad k_m^{\text{ГС}} = \frac{1}{c^2}, \quad c = 299\,792\,458 \frac{\text{м}}{\text{сек}} \simeq 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

В СИ единица измерения электрического потенциала есть:

$$1 \text{ В} \equiv \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}} \simeq \frac{1}{300} \text{ СГСЭ}_V.$$

Единица измерения напряженности электрического поля есть 1 В/м.

В любой системе единиц справедливо:

$$\frac{k_e}{k_m} = c^2.$$

### ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Индукция  $\mathbf{B}$  магнитного поля в точке  $\mathbf{r}$ , создаваемого постоянным током  $I_2$ , текущим по замкнутому контуру  $C_2$ , равна (закон Био–Савара–Лапласа)

$$\mathbf{B} = k_B I_2 \oint_{C_2} \frac{[d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Элемент  $d\mathbf{l}$  постоянного тока  $I$  в точке  $\mathbf{r}$  испытывает действие силы  $d\mathbf{F}$  (силы Ампера) со стороны магнитного поля:

$$d\mathbf{F} = k_F I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}].$$

При этом:

$$k_F k_B \equiv k_m.$$

Заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$ , в точке  $\mathbf{r}$  испытывает действие силы  $\mathbf{F}$  (силы Лоренца) со стороны магнитного поля:

$$\mathbf{F} = k_F q [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

### ЕДИНИЦЫ ГС И СИ ИЗМЕРЕНИЯ МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

В ГС принимают:

$$k_F^{\text{ГС}} = k_B^{\text{ГС}} = \frac{1}{c}.$$

В ГС единица измерения индукции магнитного поля,

$$1 \text{ Гс} = \frac{1 \text{ дин}}{1 \text{ СГСЭ}_q} = 1 \frac{\text{СГСЭ}_V}{\text{см}},$$

совпадает с единицей измерения напряженности электрического поля.

В СИ принимают:

$$k_F^{\text{СИ}} = 1, \quad k_B^{\text{СИ}} = k_m^{\text{СИ}}.$$

В СИ единица измерения индукции магнитного поля,

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}} = 10^4 \text{ Гс},$$

отличается размерностью от единицы измерения напряженности электрического поля.

### ДИВЕРГЕНЦИЯ И РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Дивергенцией векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  называется следующая скалярная функция:

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} d\sigma}{\Delta V}.$$

Здесь замкнутая поверхность  $\Delta S$  охватывает малый объем  $\Delta V$ , который включает в себя точку  $\mathbf{r}$ . Теорема Остроградского–Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\sigma = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV,$$

где  $S$  есть замкнутая поверхность, охватывающая объем  $V$ .

Ротором векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  называется такая векторная функция  $\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ , что:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} \mathbf{A} d\mathbf{l}}{\Delta\sigma}.$$

Здесь замкнутый контур  $\Delta C$  ограничивает малую поверхность  $\Delta\sigma$ , которая включает в себя точку  $\mathbf{r}$ , а  $\mathbf{n}$  есть единичный вектор нормали к поверхности  $\Delta\sigma$ . Теорема Стокса:

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\sigma,$$

где  $C$  есть замкнутый контур, ограничивающий поверхность  $S$ .

Дивергенция и ротор векторного поля

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$$

вычисляются по формулам:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial A_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\mathbf{r})}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x(\mathbf{r}) & A_y(\mathbf{r}) & A_z(\mathbf{r}) \end{vmatrix}.$$

## ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Закон Гаусса для постоянного электрического поля в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{E} d\sigma = 4\pi k_e \sum_i q_i.$$

Закон Гаусса для постоянного электрического поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k_e \rho(\mathbf{r}).$$

Закон о циркуляции постоянного электрического поля в интегральной форме:

$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Закон о циркуляции постоянного электрического поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi k_e \rho(\mathbf{r}).$$

## ЕМКОСТИ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Емкость уединенного проводника с зарядом  $q$  и потенциалом  $\varphi$  ( $\varphi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ) есть:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

В ГС единица измерения емкости есть 1 см=1 СГСЭ<sub>q</sub>/1 СГСЭ<sub>V</sub>, а в СИ – 1 Ф=1 Кл/1 В  $\simeq 9 \cdot 10^{11}$  см.

Пусть имеются  $N$  проводников с зарядами  $q_i$  ( $i = 1, 2 \dots N$ ). Потенциалы проводников определяются формулами:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N S_{ij} q_j.$$

Величины  $S_{ij}$  называются потенциальными коэффициентами. Обратные соотношения имеют вид:

$$q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \varphi_j,$$

где  $C_{ij}$  – емкостные коэффициенты ( $C = S^{-1}$ ,  $S = C^{-1}$ ). Теорема взаимности:

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad C_{ij} = C_{ji}.$$

Плотность энергии электрического поля есть:

$$w_e = \frac{E^2}{8\pi k_e}.$$

## ПОСТОЯННЫЕ ТОКИ

В ГС единица измерения силы тока есть 1 СГСЭ<sub>q</sub>/сек, а в СИ – 1 А  $\simeq 3 \cdot 10^9$  СГСЭ<sub>q</sub>/сек. Уравнение непрерывности электрического тока имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R},$$

где  $R$  есть сопротивление. В СИ единица измерения сопротивления есть 1 Ом = 1 В/1 А, а в ГС – 1 сек/см  $\simeq 9 \cdot 10^{11}$  Ом. Сопротивление однородного проводника длины  $l$  и поперечного сечения  $S$  есть:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление.

Локальная форма закона Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где  $\sigma = 1/\rho$  есть удельная электрическая проводимость. В СИ величина, обратная 1 Ом, есть 1 См (Симменс). В СИ единица измерения удельной электрической проводимости есть 1 См/м, а в ГС – 1 сек<sup>-1</sup>  $\simeq (1/9) \cdot 10^{-9}$  См/м.

Локальная форма обобщенного закона Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*),$$

где  $\mathbf{E}^*$  есть напряженность сторонних сил. ЭДС, действующая на участке цепи, равна

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}^* d\mathbf{l}.$$

Первое правило Кирхгофа для постоянных токов:

$$\sum_i I_i = 0.$$

Второе правило Кирхгофа для постоянных токов:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k.$$

Закон Джоуля–Ленца для неоднородного участка цепи:

$$\frac{dQ}{dt} = RI^2.$$

Локальная форма закона Джоуля–Ленца:

$$\frac{dQ_{уд}}{dt} = \rho j^2 = \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*).$$

## КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОВОДИМОСТИ

Пусть в веществе имеются свободные носители заряда  $i$ -го сорта с концентрацией  $n_i$ , массой  $m_i$ , зарядом  $q_i$ . Тогда классическая теория проводимости приводит к следующему выражению для электропроводности вещества:

$$\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{2m_i},$$

где  $\tau_i$  есть характерное время свободного пробега носителя заряда. Это время может быть взято равным отношению,

$$\tau_i = \frac{\lambda_i}{v_i},$$

характерной длины свободного пробега  $\lambda_i$  и характерной скорости  $v_i$ .

Закон Фарадея для электролиза:

$$M = \frac{\mu}{\nu F} Q,$$

где  $M$  есть масса вещества, которое выделяется на электроде при пропускании через электролит заряда  $Q$ ,  $\mu$  – молярная масса выделяющегося вещества,  $\nu$  – валентность ионов выделяющегося вещества, и

$$F = N_A e = 96487 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$$

есть постоянная Фарадея.

Эмпирический закон Видемана–Франца:

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = CT,$$

где  $\varkappa$  и  $\sigma$  – коэффициенты теплопроводности и электропроводности металла,  $T$  есть абсолютная температура, а коэффициент  $C$  примерно одинаков для всех металлов. В классической теории проводимости коэффициент  $C$  определяется формулой Друде:

$$C = 3 \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 = 3 \left( \frac{R}{F} \right)^2.$$

## ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Закон Гаусса для постоянного магнитного поля в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{B} d\boldsymbol{\sigma} = 0.$$

Закон Гаусса для постоянного магнитного поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0.$$

Закон о циркуляции магнитного поля в интегральной форме:

$$\oint_C \mathbf{B} d\mathbf{l} = 4\pi k_B \sum_i I_i.$$

Закон о циркуляции магнитного поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k_B \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

Эффект Холла состоит в появлении разности потенциалов  $\Delta\varphi$  между верхней и нижней сторонами пластины толщины  $l$ , помещенной в поперечное магнитное поле  $B$ , при протекании по пластине тока плотности  $j$ . При этом:

$$\Delta\varphi = \left( \frac{k_F}{nq} \right) jBl,$$

где  $n$  – концентрация носителей свободных зарядов в пластине, а  $q$  – заряд одного носителя.

### ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Индукция магнитного поля выражается через векторный потенциал следующим образом:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Градиентная (калибровочная) инвариантность:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r}) \quad \implies \quad \mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Кулоновское калибровочное условие:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0.$$

Уравнение для векторного потенциала, удовлетворяющего кулоновской калибровке:

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 4\pi k_B \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

Частное решение этого уравнения:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k_B \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Случай тонкого провода:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k_B I \int \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Закон электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = -k_F \frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} d\boldsymbol{\sigma}.$$

В СИ единица измерения магнитного потока ( $\Phi$ )  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2 = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ сек}$ , а в ГС –  $1 \text{ Мкс} = 1 \text{ Гс} \cdot 1 \text{ см}^2 = 1 \text{ ГСЭВ} \cdot 1 \text{ см} = 10^{-8} \text{ Вб}$ .

Первая пара уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -k_F \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Вторая пара уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_e \rho(\mathbf{r}, t), \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_B \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{k_B}{k_e} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

### УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Явный вид уравнений Максвелла в ГС ( $k_e = 1, k_F = k_B = 1/c$ ):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Явный вид уравнений Максвелла в СИ ( $k_e = 1/4\pi\epsilon_0, k_F = 1, k_B = \mu_0/4\pi$ ):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Волновое уравнение для вектора напряженности электрического поля:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0.$$