Институт Естественных Наук и Экологии
Физико-Математический Колледж

"УТВЕРЖДАЮ"
Ректор ИНЕСНЭК
______________________С.Т.Беляев
______________________2002 г.

ПРОГРАММА
по курсу
АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
для студентов 2 курса (I семестр)

Лекции: 32 часа
Практические (семинарские) занятия: 32 часа
ВСЕГО ЧАСОВ: 64
Самостоятельная работа: 2 часа в неделю
Программу составил: д.ф.м.н. Зейн Николай Евгеньевич

ГРАФИК СДАЧИ ЗАДАНИЙ.

I задание - 24.09
II задание - 5.11
III задание - 17.12

Аналитическая механика.

1. Дифференциальные уравнения движения произвольной системы материальных точек. Уравнения движения в форме Лагранжа.

    1. Связи и их классификация. Возможные и виртуальные перемещения. Идеальные связи. Голономные и неголономные системы. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа первого рода. Независимые координаты. Обобщённые силы. Кинетическая энергия в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа второго рода. Лагранжиан. ([1],§1.1−1.4) и (или) ([2],§1−6)
    2. Потенциальная энергия. Сохранение полной энергии.([2],§7, 8) Законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения, как следствие однородности времени, пространства и изотропности пространства. ([3],§6, 7, 9)
    3. Одномерное движение и интегрирование уравнений движения. Движение в центральном поле. Кеплерова задача. Столкновение частиц. Сечение рассеяния. ([3],§11, 13, 14, 15, 18)
    4. Движение твёрдого тела: угловая скорость вращения, тензор инерции, момент импульса твердого тела, углы Эйлера. ([3],§31−35)
    5. Уравнения Эйлера. Симметричный волчок с закрепленной нижней точкой в поле тяжести. ([3],§36),([4],§30, 31), ([5],гл V §4−7)
    6. Принцип наименьшего действия Гамильтона. Уравнения Лагранжа второго рода как следствие вариационного принципа. ([4],§12, 13) Действие как функция координат и времени. ([3],§43)

2. Гамильтонов формализм.

    1. Преобразование Лежандра. ([4],§14) Канонические уравнения Гамильтона. ([4],§15) Циклические переменные. ([4],§15)
    2. Теорема Лиувилля и ее следствие: теорема Пуанкаре о возвращении. ([4],§16)
    3. Вариационный принцип в расширенном фазовом пространстве. ([4],§45)
    4. Лемма Стокса. Интегральные кривые уравнения Гамильтона как линии ротора 1-формы. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре-Картана. ([4],§44)

5. Определение канонического отображения. ([4],§44, 16) Канонические преобразования. ([4],§45) Производящие функции канонического преобразования. ([4],§48)
6. Критерии каноничности преобразования. Скобки Пуассона. ([3],§42)
7. Уравнения Гамильтона-Якоби. ([3],§47)
8. Разделение переменных, движение частицы в поле двух притягивающих центров. ([4],§47)
9. Понижение порядка системы канонических уравнений с помощью интеграла энергии. ([4],§45) Принцип наименьшего действия Мопертюи - Лагранжа.([4],§45)
10. Оптико - механическая аналогия. Принцип Гюйгенса

3. Малые колебания.

   1. Равновесие. Устойчивость и неустойчивость. Теорема Ляпунова для консервативных систем.([4],§22,)
   2. Линеаризация и малые колебания. Динамика консервативных и диссипативных систем вблизи равновесия при произвольных начальных условиях. Собственные частоты для систем со многими степенями свободы. ([3],§21 − 23, 25)
   3. Вынужденные колебания и резонанс.([3],§26)
   4. Параметрический резонанс. Матрица отображения.([4],§25)
   5. Движение частиц в магнитном поле.([6],§). Вид функций Лагранжа и Гамильтона для частиц в магнитном поле.

4. Введение в теорию возмущений.

   1. Точное решение задачи о движении математического маятника. Действие для нелинейного осциллятора.([7],§1.3), ([8],§1.4)
   2. Переменные действие-угол в одномерном случае.([4],§50)
   3. Адиабатический инвариант.([4],§50, ,) Теорема о усреднении.
   4. Интегрируемые системы. Движение на двумерном торе ([8],§1.5)
   5. Каноническая теория возмущений([7],§2.1a, 2.2a) : a) одномерный случай - p-q представление. b) одномерный случай - J,ϕ представление.
   6. Теория возмущений для потенциала, зависящего от времени.
   7. Устранение малых знаменателей. Стандартный гамильтониан нелинейного резонанса. ([8],§2.1, 2.2)

5. Хаотическое движение консервативных систем.

   1. Нелинейный маятник под действием внешней силы, зависящей от времени. Сепаратрисное отображение. Возникновение неустойчивости. ([8],§3.1)
   2. Ширина стохастического слоя вблизи сепаратрисы. ([8],§3.2)). Две степени свободы: малые знаменатели в теории возмущений. ([7],§2.2)

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература.

1. Г. Голдстейн "Классическая механика", Москва, ГИТТЛ, 1957
2. Ф. Р. Гантмахер "Лекции по аналитической механике", Москва, "Наука"1966.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц "Механика", М. Наука, 1965.
4. В. И. Арнольд "Математические методы классической механики"М, Наука 1979
5. М. А. Айзерман "Классическая механика"М. Наука, 1974.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц "Теория поля", М. Наука, 1988
7. А. Либерман, М. Лихтенберг. "Регулярная и стохастическая динамика"Москва, Мир, 1984.
8. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников "Слабый хаос и квазирегулярные структуры"М, Наука 1991
9. Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко "Сборник задач по аналитической механике"М. Наука 1996
10. Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо "Сборник задач по классической механике"М. Наука 1969

Дополнительная литература.

11. А. И. Алексеев "Техника вычислений в классической механике", МИФИ 1980, Учебное пособие.
12. И. И. Ольховский "Теоретическая механика для физиков"Москва, Наука, 1970.

Все номера задач из [9].

ЗАДАНИЕ 1

I. Связи и независимые координаты. Уравнения Лагранжа I и II рода.

12.6, 12.10, 12.22, 12.86.

I.1 Две точки с одинаковой массой m соединены стержнем неизменной длины l с пренебрежимо малой массой. Система может двигаться только в вертикальной плоскости и только так, что скорость середины стержня направлена вдоль стержня. Найти траектории точек из уравнений Лагранжа первого рода.

12.29, 12.31, 12.36

II. Интегрирование одномерных уравнений движения.

II.1 Определить, по какому закону обращается в бесконечность период движения маятника длиной l и массы m при приближении энергии E к $2mgl$.

II.2 Определить, по какому закону обращается в бесконечность период движения частицы в яме, изображённом на рис 1, при приближении энергии E к U_m.

II.3 Оценить период движения частицы в потенциале $U(x)$ (Рис 2), если её энергия близка к U_m. ($E - U_m \ll U_m - U_{min}$). Определить, в течение какой части периода частица находится на участке от x до $x+dx$.

II.4 Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц сферическим "потенциальным горбом".

$$U(r) = \begin{cases} V & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

II.5 Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния быстрых частиц ($E \gg V$) в потенциале.

$$U(r) = \begin{cases} V(1 - \frac{r^2}{R^2}) & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

III.Вращение твёрдого тела.

11.8(2,8), 11.15, 11.59, 11.79, 12.56.

ЗАДАНИЕ 2

IV. Вариационная формулировка уравнений движения

21.12, 21.13

V. Уравнения Гамильтона.

V.1 Найти функцию Лагранжа, если функция Гамильтона равна

a) $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{p^2}{2m} - \mathbf{pa} \quad (\mathbf{a} = const)$

b) $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{c|p|}{n(\mathbf{p}, \mathbf{r})}$

19.19, 19.31, 19.35

V.2 Вычислить скобки Пуассона:

a)$\{M_i, x_j\}, \quad \{M_i, p_j\}, \quad \{M_i, M_j\}$

b)$\{\mathbf{ap}, \mathbf{br}\}, \quad \{\mathbf{aM}, \mathbf{br}\}, \quad \{\mathbf{aM}, \mathbf{bM}\}$

c)$\{\mathbf{M}, \mathbf{rp}\}, \quad \{\mathbf{p}, r^n\}, \quad \{\mathbf{p}, (\mathbf{ar})^{\mathbf{2}}\}$

VI. Интегральные инварианты

22.1, 22.31.

VII. Канонические преобразования

VII.1 Функция Гамильтона гармонического осциллятора имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

где m и $|omega$ - масса и частота колеблющейся частицы. Написать функцию Гамильтона H' и уравнения Гамильтона в новых канонически сопряжённых переменных Q и P, взяв в качестве производящей функции следующие выражения:

$$a)F(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \mathrm{ctg} Q; \quad b)G(q, P) = -\frac{m\omega q^2}{2P}; \quad c)(p, P) = \frac{p^2}{2m\omega \cos P};$$

VII.2 Рассматриваются малые колебания ангармонического осциллятора, функция Гамильтона которого

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \alpha x^3 + \beta x p^2$$

и $\alpha x \ll \omega^2$, $\beta x \ll 1$. В каноническом преобразовании, задаваемом производящей функцией $\Phi = xP + ax^2P + bP^3$, подобрать параметры a и b так, чтобы новая функция Гамильтона с точностью до членов первого порядка по $\alpha\omega^{-2}Q$, βQ включительно не содержала ангармонических членов, и найти $x(t)$.

VII.3 Найти производящую функцию канонического преобразования, состоящего в переходе от $q(t)$, $p(t)$ к $Q(t) = q(t+\tau)$ $P(t) = p(t+\tau)$ $\tau = \text{const}$ для

a) свободного движения

b) движения в однородном поле

c) осциллятора

VIII Уравнение Гамильтона-Якоби.

VIII.1 Постоянные однородные электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{H}$ поля взаимно ортогональны. Выбирая электромагнитные потенциалы $\mathbf{A}$ и ϕ данных скрещенных полей в виде $A_x = A_z = 0$, $A_y = Hx$ и $\phi = -Ex$ найти полный интеграл уравнения уравнения Гамильтона - Якоби для частицы с массой m и зарядом e.

VIII.2 Диполь с моментом $\mathbf{d}$ создает в пространстве электрическое поле с потенциалом $\phi = \mathbf{dr}/r^3$. В электрическом поле рассеивается протон с массой m и зарядом e. До рассеяния протон двигался с прицельным расстоянием ρ и имел скорость $\mathbf{v}$, антипараллельную вектору $\mathbf{d}$. Выразить траекторию протона через квадратуры. В случае далёких пролетов протона с большой энергией E определить траекторию в аналитическом виде путем разложения в ряд по малому параметру $ed/E\rho^2$.

VIII.3 Найти траекторию движения (выразить через квадратуры) в поле двух кулоновских центров $U(r) = \alpha(1/r_1 - 1/r_2)$, находящихся друг от друга на расстоянии $2c$, если скорость частицы на бесконечности параллельна оси, проходящей через кулоновские центры.

24.8 24.104

IX Оптико-механическая аналогия

21.35, 21.36

ЗАДАНИЕ 3

X Колебания.

16.19, 16.58, 16.64, 16.88, 16.111. 18.4, 18.9

X.1 Определить энергию E , приобретённую осциллятором под действием силы $F(t) = F\exp(-t/\tau)$ за всё время её действия, если при $t = -\infty$ осцилятор покоился.

X.2 Найти нормальные колебания молекулы, имеющей форму равностороннего треугольника. Силы считать парными.

XI Переменные действие - угол.

XI.1 Найти переменные действие - угол для частицы в поле $U(x) = \infty \quad x < 0, \quad U(x) = Fx \quad x > 0$

24.109, 24.110

XI.2 Найти переменные действие-угол и частоты малых колебаний двух маятников, соединённых пружиной, длина которой l равна расстоянию между маятниками. Жёсткость пружины k.

XII Адиабатические инварианты.

XII.1 Частица с массой m и зарядом e движется в магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Определить изменение энергии частицы за один оборот в случае, когда магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля). Доказать, что величина $p_\perp^2/H$ остается постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2.

XII.2 Получить формулу $\vec{F} = (\vec{\mu}\vec{\nabla})\vec{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле и найти в нерелятивистском случае уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы. (Поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты).

XII.3 На больших расстояниях поле Земли представляет поле диполя с магнитным моментом $m = 8.1 \cdot 10^{25}$ гаусс$\cdot^3$.

а) найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить как меняется поле вдоль силовой линии.

б) предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол α с плоскостью экватора, определить максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей. Найти угол α, при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости значительно больше радиуса Земли.

в) используя результат задачи N V.2 найти период дрейфа вокруг Земли протона с энергией 10 Мэв, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30000 км от Земли.

XIII. Теория возмущений и нелинейные колебания.

XIII.1 Найти амплитуду колебаний ангармонического осциллятора

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f\cos(\omega t)$$

в области резонанса $|\omega - \omega_0| \ll \omega$. XIII.2 Оценить ширину стохастического слоя вблизи сепаратрисы математического маятника, находящегося под действием внешней силы $\varepsilon V \sin(x - \nu t - \phi_n)$.